

ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 01.12.2025. ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

Довывод

1. Кубический дом $1000 \times 1000 \times 1000$ разбит на комнаты $1 \times 1 \times 1$; в некоторых комнатах живёт по одному человеку, а остальные пусты. Назовём *общительностью* человека количество занятых комнат, имеющих с его комнатой общую грань. Оказалось, что у чётного числа жителей общительность равна 4, а у каждого из остальных она равна 2. Докажите, что общее количество жителей чётно.

2. Пусть ABC — треугольник, в котором $\angle ACB = 90^\circ$ и $\angle A > \angle B$. Касательная в точке C к описанной окружности треугольника ABC , пересекает прямую AB в точке D . Точка E — середина отрезка CD , а точка F лежит на прямой EB так, что $AF \parallel CD$. Докажите, что прямые AB и CF перпендикулярны.

3. Дано простое число $p > 3$. Для каждого натурального $n < p$ обозначим через x_n наименьшее натуральное число, для которого nx_n даёт при делении на p остаток 1. Какой остаток даёт при делении на p число

$$\sum_{n=1}^{p-1} n \left[\frac{nx_n}{p} \right] ?$$

4. Анна и Боб играют в игру с колодой из 2025 карт, пронумерованных числами $1, 2, \dots, 2025$. Изначально колода как-то перетасована, оба игрока знают порядок карт в ней. Анна и Боб ходят по очереди, начинает Анна. За ход игрок сначала смотрит на верхнюю карту. Если её номер k , он каким-то образом перетасовывает верхние k карт (показывая другому игроку, как именно он их перетасовал). Если после этого карта k по-прежнему лежит наверху, игрок, сделавший ход, проиграл, иначе ход переходит к другому игроку. Назовём перетасованную колоду *интересной*, если в игре, начинающейся с этой колоды, Боб может добиться того, чтобы Анна проиграла. Каких интересных колод больше — тех, в которых вторая сверху карта имеет номер 28, или тех, в которых она имеет номер 29?

ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 01.12.2025. ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

Вывод

5. Совершенным паросочетанием в графе называется набор рёбер такой, что из каждой вершины выходит ровно одно ребро этого набора. В двудольном графе с долями S и T есть хотя бы одно совершенное паросочетание. Докажите, что можно расставить на рёбрах графа попарно различные действительные числа так, что

- если в каждой вершине доли S выбрать по ребру с наименьшим числом, то получится совершенное паросочетание;
- если в каждой вершине доли T выбрать по ребру с наибольшим числом, то получится совершенное паросочетание.

6. Отрезки BE и CF — биссектрисы углов B и C остроугольного неравобедренного треугольника ABC , пересекающиеся в точке I . Точка N — середина меньшей дуги BC описанной окружности Ω треугольника ABC . Точка X на дуге BAC окружности Ω такова, что $NX \perp EF$. Пусть точки P и Q являются серединами дуг XB и XC , содержащих вершины C и B соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника IEF касается Ω тогда и только тогда, когда прямые BP , CQ и EF пересекаются в одной точке или параллельны.

7. Определим многочлены $f_n(x)$ формулами

$$f_1(x) = x^2 + x, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) \cdot (f_n(x) + 2^{2^{n-1}-1}).$$

Докажите, что при любом $n \geq 3$ многочлен

$$f_n(x) + 2^{2^{n-1}-1}$$

раскладывается в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами одинаковой степени.